PREMIER EXERCICE

On considère la fonction numérique f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = e^{-t^2} \operatorname{ch} t .$$

On rappelle que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

1°/ Dresser le tableau des variations de f en justifiant soigneusement les éléments qui y figurent.

2°/ a) Donner le développement limité de f à l'ordre 5 au voisinage de 0.

b) Donner également le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{1}{2}$.

3°/ Montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion entre les points correspondant aux abscisses $\frac{1}{2}$ et 2 .

4°/ Représenter graphiquement f .

5°/ On définit une nouvelle fonction G sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G(x) = \int_0^x f(t)\, dt .$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G(x) = \frac{e^{\frac{1}{4}}}{2} \int_{-x+\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} e^{-u^2}\, du .$$

6°/ Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad H(x) = \int_{-x}^{+x} e^{-u^2}\, du .$$

a) Montrer que H est une fonction croissante.

b) En remarquant que : $\forall u > 1$, $e^{-u^2} < e^{-u}$,
Montrer que $H(x)$ admet, quand x tend vers $+\infty$, une limite L que l'on ne cherchera pas à calculer.

7°/ Montrer que $G(x)$ admet, quand x tend vers $+\infty$, une limite que l'on exprimera à l'aide de L .

DEUXIEME EXERCICE

Soit $\mathcal{M}$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans le corps des complexes $\mathbb{C}$. Soit J l'élément de $\mathcal{M}$ s'écrivant :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1°/ Pour n entier positif, calculer J^n .

2°/ Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ engendré par (I, J, J^2) , où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

a) Quelle est la dimension de $\mathcal{F}$?

b) Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}$, admettant un élément unité.

c) Caractériser les éléments inversibles de $\mathcal{F}$.

3°/ Prouver l'équivalence :

$$\forall M \in \mathcal{M}, \quad (M \in \mathcal{F}) \iff (MJ = JM) .$$

4°/ On pose : $K = I - J + J^2$

et $\mathcal{G} = \{ M \in \mathcal{F} ; \ MK = KM = M \}$.

a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}$.

b) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.
Expliciter une base de $\mathcal{G}$.

c) Montrer que $\mathcal{G}$ admet un élément neutre pour la multiplication.

d) Prouver que $\mathcal{G}$ est un corps.

.../...

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET DES MINES DE DOUAI 1983
Durée: 4 h

183

TROISIEME EXERCICE

On se place dans le plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant les vecteurs unitaires des axes Ox et Oy. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon R ; soit θ un nombre réel appartenant à $]-\pi, +\pi]$.

On appelle D_θ la tangente à $\mathcal{C}$ au point M_θ de coordonnées $(R\cos\theta, R\sin\theta)$.

1°/ Ecrire l'equation de D_θ.

2°/ Soient Δ_θ et Δ'_θ les bissectrices de Ox et D_θ, définies pour $\theta \neq -\frac{\pi}{2}$ et $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.
Ecrire les équations de Δ_θ et Δ'_θ.

3°/ On note H_θ et H'_θ les projections orthogonales de O sur Δ_θ et Δ'_θ.
Déterminer les ensembles géométriques décrits par H_θ et H'_θ lorsque θ varie.

4°/ Soient h un nombre réel et E la droite d'équation $y = h$.

a) Ecrire les équations des bissectrices Γ_θ et Γ'_θ des droites D_θ et E, lorsque ces bissectrices sont définies.

b) On suppose h différent de R et de -R. Montrer qu'il existe des paraboles $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ d'axe Oy telles que, pour tout θ, Γ_θ est tangente à $\mathcal{T}$ et Γ'_θ est tangente à $\mathcal{T}'$.

c) Que peut-on dire des cas $h = R$ et $h = -R$?

QUATRIEME EXERCICE

(toutes options sauf TA)

On considère le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine euclidienne habituelle et l'application F définie par :

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} X = f(x,y) = e^x \cos y \\ Y = g(x,y) = e^x \sin y \end{pmatrix}$$

1°/ a) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

b) Que peut-on dire de : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$?

2°/ a) Soit a un nombre réel. Déterminer l'image par F de $\{a\} \times \mathbb{R}$ et la représenter graphiquement.

b) $\mathbb{R}^-$ désignant l'ensemble des réels négatifs ou nul, déterminer l'image par F de $\mathbb{R}^- \times]-\pi, +\pi]$ et la représenter graphiquement.

c) Soit k un nombre réel non nul. Déterminer l'image S_k par F de la droite d'équation $y = kx$.
Comment se déduit-elle géométriquement S_{-k} de S_k ?
Représenter graphiquement S_k pour k positif.

3°/ On considère la restriction $\tilde{F}$ de F à $\mathbb{R}^- \times]-\pi, +\pi]$.

a) Montrer que $\tilde{F}$ est injective. Est-elle surjective ?

b) Définir sur l'image de $\tilde{F}$ l'application G réciproque de $\tilde{F}$.

4°/ Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Soit α un nombre réel et Δ_α la droite d'équation $y = \alpha$.
Déterminer l'image par F de $D \cap \Delta_\alpha$.

b) Tracer les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ admettant respectivement pour équation en coordonnées polaires $\rho_1 = e^{\sqrt{1-\theta^2}}$ et $\rho_2 = e^{-\sqrt{1-\theta^2}}$.

c) En déduire l'image par F de D.

5°/ On considère la courbe Γ d'équation : $\sqrt{X^2+Y^2}\,\mathrm{Log}\,(X^2+Y^2) - 2Y = 0$.

a) Déterminer $F^{-1}(\Gamma)$.

b) Représenter graphiquement Γ